Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ÉCONOMIE SOCIALE ET FAMILIALE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation du freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**
2. **Contrôle des tubes fluorescents et conformité des rivets** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsesf.fr/assets/annales/bts-esf/E2 - Mathématiques/2022/BTS ESF - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Modélisation du freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ ralentit sous l'action d'un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction exponentielle. L'étude mobilise une équation différentielle, les variations et la limite de la fonction, le calcul d'une distance, un développement limité et une tangente.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0.

Pour une équation de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = Ce^{-at}$. Ici, $a = 0,8$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. La fonction g définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5 est donnée. Vérifier qu'elle est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

Comme $g(t) = 5$, on a $g'(t) = 0$. Alors $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$, donc g vérifie bien l'équation (E).

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de (E).

Question 1.c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

1. Une solution particulière de (E) est la fonction constante $g(t) = 5$.
2. Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à cette solution une solution de l'équation homogène.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,8t} + 5$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $f(t) = Ce^{-0,8t} + 5$. La condition initiale impose $f(0) = C + 5 = 20$, donc $C = 20 - 5 = 15$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ tend vers 0, car son exposant tend vers $-\infty$. La limite de $f(t)$ est donc 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. En déduire que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ lorsque $t \to +\infty$ vaut 5. La courbe C admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 5$ en $+\infty$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En utilisant l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$, puisque l'exponentielle est strictement positive. Ainsi, f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	–	
$f(t)$	20	↘ 5

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse atteignait 0. Or f décroît vers 5 et reste donc strictement supérieure à 5 pour tout instant de freinage.

- La vitesse ne s'annule pas.
- Selon ce modèle, le chariot ne s'arrête pas.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, sans atteindre 0.

Question 4.a. Vérifier que la fonction F définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t est une primitive de f.

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = -18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est égale à $f(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

F est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

Question 4.b. La distance parcourue entre les instants t_0 et t_1 est donnée par l'intégrale de f entre ces instants. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

1. La distance vaut $d = F(1) - F(0)$.
2. En remplaçant par l'expression de F, on obtient $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m, soit environ $15,3251$ m.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Question à choix multiples : choisir l'unique expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro parmi les propositions. Recopier la réponse choisie sans justification. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

Réponse à recopier : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en $t = 0$ est $y = f(0) + f'(0)t$. Ici, $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12$, d'où l'équation demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$T : y = 20 - 12t$.

2. Contrôle des tubes fluorescents et conformité des rivets

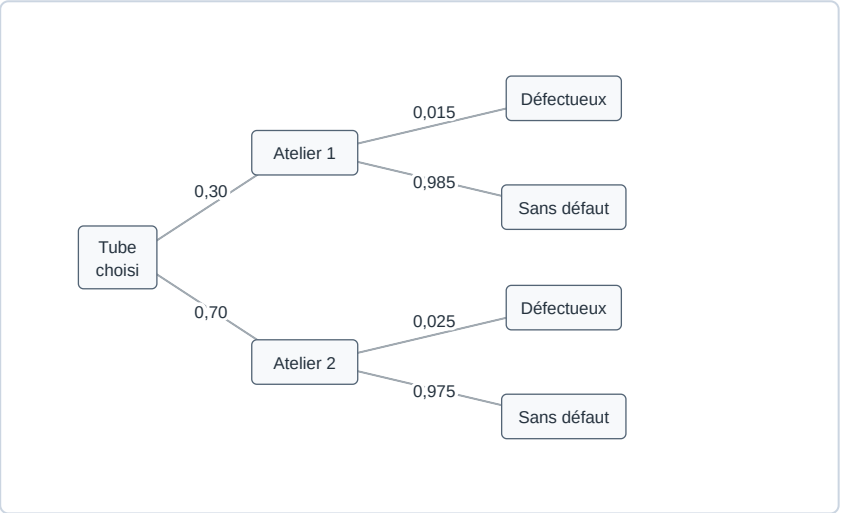
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers et contrôle la présence de défauts selon leur provenance. L'exercice étudie également la durée de fonctionnement des tubes par une loi exponentielle et estime la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation de production des tubes dans les ateliers 1 et 2, en distinguant les tubes défectueux et non défectueux.

L'arbre commence par l'atelier de provenance : 30 % des tubes viennent de l'atelier 1 et 70 % de l'atelier 2. À chaque atelier, la branche « défaut » porte la fréquence de défauts indiquée dans l'énoncé. La branche « sans défaut » porte la probabilité complémentaire, soit 1 moins cette fréquence. Les probabilités des branches finales sont conditionnelles à l'atelier de provenance.

Production et conformité des tubes



Probabilités inscrites sur chaque branche.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré : atelier 1 (0,30), atelier 2 (0,70) ; défauts respectifs (0,015 ; 0,025), sans défaut (0,985 ; 0,975).

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

La probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut se calcule en multipliant la probabilité de provenance par la probabilité conditionnelle de défaut dans cet atelier. D'après l'énoncé, ces valeurs sont 0,30 et 0,015. Ainsi, $P(A_1 \cap D) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$, soit une probabilité de 0,45 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit $0,45\,\%$.

Question 3. Montrer que la probabilité qu'un tube prélevé au hasard présente un défaut est P(D) = 0,022.

Les deux provenances sont incompatibles : un tube défectueux vient soit de l'atelier 1, soit de l'atelier 2. On additionne donc leurs probabilités conjointes, obtenues en multipliant la proportion de production de chaque atelier par son taux de défaut.

Atelier	Calcul	Probabilité conjointe
1	$0,30 \times 0,015$	$0,0045$
2	$0,70 \times 0,025$	$0,0175$

La somme vaut $0,022$, soit 2,2 % de la production totale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit $2,2\,\%$.

Question 4. Sachant que le tube ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

On cherche la proportion de tubes issus de l'atelier 2 parmi les tubes sans défaut. La probabilité d'être issu de l'atelier 2 et sans défaut est $0,70 \times 0,975 = 0,6825$. La probabilité d'être sans défaut est le complément de celle d'avoir un défaut : $1 - 0,022 = 0,978$. On divise la probabilité conjointe par cette probabilité conditionnante.

$$P(A_2 \mid \overline{D}) = \frac{0,6825}{0,978} \approx 0,698.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit environ $69,8\,\%$.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est donnée par $E(T) = \frac{1}{\lambda}$. Ici, $\lambda = 0,001$ par heure, donc $E(T) = \frac{1}{0,001} = 1\,000$ heures. Cette espérance correspond à la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes fluorescents, et non à une durée garantie pour chaque tube.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : la durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube est de 1 000 heures.

Question 2. **Calculer, en arrondissant au 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La formule fournie donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Comme la loi exponentielle est continue, la probabilité d'obtenir exactement 8 000 heures est nulle : les événements $T < 8\,000$ et $T \leq 8\,000$ ont donc la même probabilité. En remplaçant t par 8 000 et λ par 0,001, on calcule :

$$P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0{,}9997.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 1{,}00$, soit 100 % au centième.

Question 3. **Calculer, en arrondissant au 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.**

Pour une loi exponentielle, la probabilité de dépasser une durée t est la probabilité de survie $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. On utilise donc le paramètre $0{,}001$ et le seuil de 10 000 heures. Le calcul donne une probabilité très faible, environ 0,0000454. L'arrondi demandé au centième est bien $0{,}00$, même si la probabilité exacte n'est pas nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0{,}00$ au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **À partir de l'échantillon de 1 000 rivets, dont 975 sont conformes, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée de rivets conformes dans l'échantillon. Sur 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes ; on divise donc l'effectif conforme par l'effectif total : $f = \dfrac{975}{1\,000} = 0{,}975$. Cette fréquence estime la proportion de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = 0{,}975$, soit $97{,}5\,\%$.

Question 2. **En utilisant la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur f pour la proportion p au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-3} près.**

La formule de l'énoncé utilise $f = 0{,}975$ et $n = 1\,000$. La marge d'erreur vaut $1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}975(1-0{,}975)}{1\,000}} \approx 0{,}009677$. L'intervalle centré sur f a donc pour bornes $0{,}975 - 0{,}009677$ et $0{,}975 + 0{,}009677$. Après arrondi de chaque borne au millième :

Borne inférieure	Borne supérieure
$0,965$	$0,985$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux où il est 3. Les deux exercices de 10 points étudient le freinage d'un chariot, la qualité et la durée de vie de tubes fluorescents, ainsi que la conformité de rivets, à l'aide d'équations différentielles, d'analyse, de probabilités et de statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = b$, la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.
- Si $f(t)$ tend vers L lorsque t tend vers $+\infty$, la droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale à sa courbe.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- L'intervalle fourni pour une proportion au niveau de confiance de 95 % est $f \pm 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale après avoir déterminé la solution générale de l'équation différentielle.
- Pour dresser les variations, étudier le signe de la dérivée sur l'intervalle demandé.
- Distinguer la probabilité conditionnelle de la probabilité d'intersection dans l'arbre pondéré.
- Dans l'intervalle de confiance, utiliser la fréquence observée et l'effectif, puis respecter l'arrondi demandé.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la constante de la solution du freinage ?

Écrivez d'abord la solution générale de l'équation différentielle, puis appliquez la condition initiale $f(0) = 20$. Remplacez t par zéro dans l'expression générale et résolvez l'équation obtenue pour déterminer la constante.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 2 sachant qu'il est sans défaut ?

Utilisez la formule conditionnelle : $P(A_2 \text{ sachant non D}) = P(A_2 \cap \text{non D}) / P(\text{non D})$. Les probabilités de l'intersection et de l'absence de défaut se lisent ou se calculent à partir de l'arbre pondéré.

Q : Comment répartir son temps entre les exercices ?

L'épreuve dure deux heures et comprend deux exercices de 10 points. Repérez les questions accessibles, répartissez votre temps selon leur difficulté, puis gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis demandés.

Q : Quelle précision faut-il respecter pour les résultats ?

Suivez la consigne de chaque question : probabilités arrondies au 10^{-2}, distance au centimètre et bornes de l'intervalle de confiance à 10^{-3}. Donnez une valeur exacte pour la distance avant de fournir son arrondi.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsesf.fr/assets/annales/bts-esf/E2 - Mathématiques/2022/BTS ESF - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Économie Sociale et Familiale : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.