Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ÉCONOMIE SOCIALE ET FAMILIALE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

BTS ESF

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation du freinage d'un chariot (12 questions) **Page 3**

2. Étude d'un système électrique par transformée de Laplace (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsesf.fr/assets/annales/bts-esf/E2 - Mathématiques/2022/BTS ESF - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation du freinage d'un chariot

Un chariot de fête foraine, initialement propulsé à 20 m/s, est ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est étudiée à l'aide d'une équation différentielle, puis par ses variations, son intégrale et son développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y(t) = ke^{-0,8t}$, où k est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\boxed{y(t) = ke^{-0,8t},\ k \in \mathbb{R}}$

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Comme $g(t) = 5$, on a $g'(t) = 0$. La substitution dans l'équation donne :

$$g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est bien une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1.c. Déduire des résultats précédents l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. Une solution particulière de l'équation complète est $g(t) = 5$.
2. On lui ajoute les solutions de l'équation homogène : $ke^{-0,8t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\boxed{y(t) = 5 + ke^{-0,8t},\ k \in \mathbb{R}}$

Question 2. Déterminer la solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. À $t = 0$, la condition initiale donne $5 + k = 20$, donc $k = 15$.

On remplace cette constante dans la solution générale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{f(t) = 15e^{-0,8t} + 5}$

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Lorsque $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Ainsi, dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend vers zéro.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5}$

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant égale à 5, la courbe C admet une asymptote horizontale d'ordonnée 5.

Son équation est $y = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{y = 5}$

Question 2. À partir de l'expression de f'(t) fournie, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante. Elle part de $f(0) = 20$ et tend vers 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	–	
$f(t)$	20	↘ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour tout $t \geq 0$, $15e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse ne s'annule jamais et tend vers 5 m/s.

- Le chariot ne s'arrête pas.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse tend vers 5 m/s.

Question 4.a. **Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant F, on obtient $F'(t) = -18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} + 5$.

Comme $-18,75 \times (-0,8) = 15$, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4.b. **Calculer la distance exacte parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

Par le théorème fondamental, $d = F(1) - F(0) = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75)$. Ainsi, $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$, soit environ $15,325$ m. Au centimètre près, on arrondit à $15,33$ m.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\boxed{d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33 \text{ m}}$

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les propositions, choisir le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le polynôme affiché est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Il s'agit de la proposition de droite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\boxed{f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \to 0}$$

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en zéro est $y = f(0) + f'(0)t$. Or $f(0) = 15 + 5 = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$.

En reportant ces valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient :

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\boxed{T : y = 20 - 12t}$

2. Étude d'un système électrique par transformée de Laplace

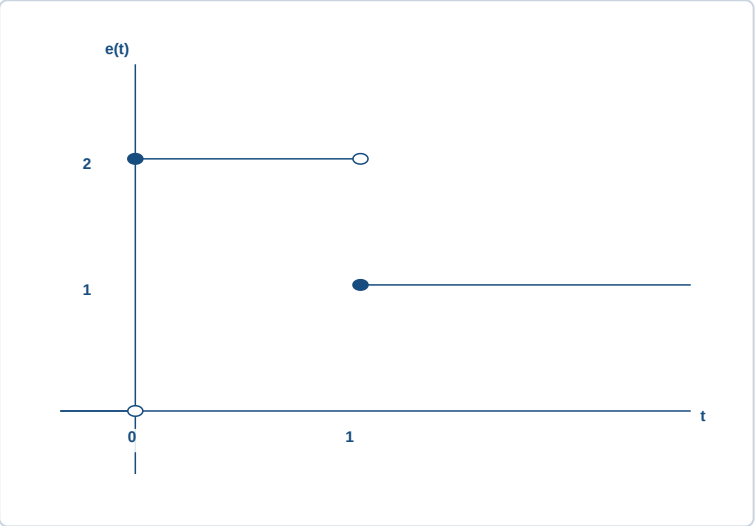
Un système électrique entrée-sortie est caractérisé par sa fonction de transfert et reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1). L'exercice porte sur les transformées de Laplace des signaux d'entrée et de sortie, leur expression par intervalles et leur représentation graphique.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Tracer sur le document-réponse la courbe représentative de la fonction e(t).

Le signal est causal. Pour $0 \leq t < 1$, seul $U(t)$ vaut 1, donc $e(t) = 2$. Pour $t \geq 1$, les deux échelons valent 1, donc $e(t) = 1$. Le tracé est nul avant 0, constant égal à 2 de 0 à 1, puis constant égal à 1 à partir de 1.

Courbe du signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

Par linéarité et d'après le formulaire, $\mathcal{L}(U(t)) = 1/p$ et $\mathcal{L}(U(t-1)) = e^{-p}/p$. Ainsi, la transformée du signal $2U(t) - U(t-1)$ est la différence des transformées correspondantes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - e^(-p)/[p(p + 1)].

La relation du système est $S(p) = H(p)E(p)$. En utilisant $H(p) = 1/(p+1)$ et $E(p) = (2 - e^{-p})/p$, on obtient $S(p) = (2 - e^{-p})/[p(p+1)]$. En séparant les deux termes, on retrouve l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Mettons le membre de droite au même dénominateur : $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{(p+1)-p}{p(p+1)}$. Le numérateur se réduit à 1, ce qui donne bien le membre de gauche.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(-p)/p et de e^(-p)/(p + 1).

Les deux premières inverses se lisent dans le formulaire. Le facteur e^{-p} correspond à un retard d'une unité : la fonction retardée est multipliée par $U(t-1)$.

1. $\mathcal{L}^{-1}(1/p) = U(t)$.
2. $\mathcal{L}^{-1}(1/(p+1)) = e^{-t}U(t)$.
3. $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/p) = U(t-1)$.
4. $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/(p+1)) = e^{-(t-1)}U(t-1)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition en éléments simples donne $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. Sur $[0;1[$, le terme retardé est nul puisque $U(t-1) = 0$. Il reste donc $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), puis donner sa valeur exacte et une valeur approchée au dixième.

À $t = 1$, l'expression donnée devient $s(1) = (e - 2)e^{-1} + 1$. Comme $ee^{-1} = 1$, cela se simplifie en $2 - 2/e$, soit environ $1{,}264$. L'arrondi au dixième est donc $1{,}3$.

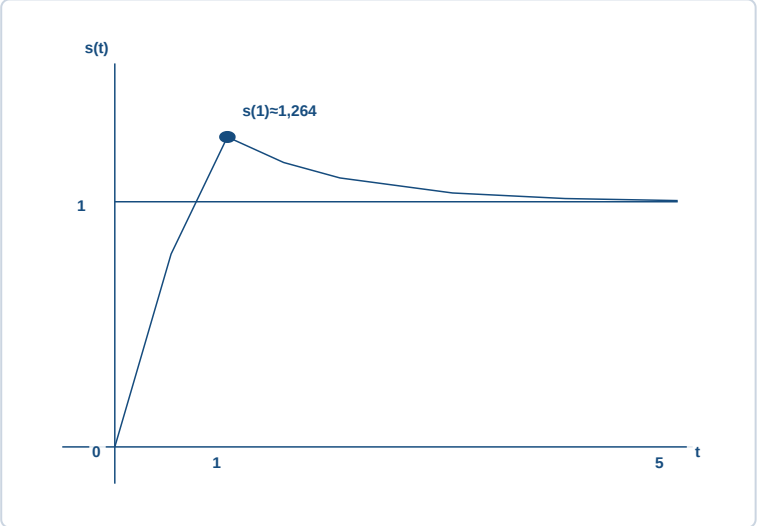
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$ au dixième.

Question 5.b. Compléter sur le document-réponse la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0; 1[$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$ croît de 0 jusqu'à $s(1) = 2 - 2/e \approx 1{,}264$. Pour $t \geq 1$, $s(t) = 1 + (e - 2)e^{-t}$ décroît vers 1. Les deux expressions coïncident en $t = 1$: la courbe est continue et atteint son maximum en ce point.

Courbe représentative du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe croît de $(0; 0)$ à $(1; 2 - 2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, $s(t) = 1 + (e - 2)e^{-t}$. Quand t tend vers $+\infty$, e^{-t} tend vers 0. Le terme exponentiel disparaît donc dans la limite.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$\lim_{t \to +infty} s(t) = 1.$$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, Session 2022, code 22MATGRB2, durée 2 heures. Le coefficient varie selon la spécialité : 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique. Deux exercices de 10 points étudient le freinage d'un chariot puis la réponse d'un système électrique, évaluant équations différentielles, intégration, développement limité et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont y(t) = ke^(-at) ; une solution particulière permet de résoudre l'équation avec second membre.
- Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, la limite en +∞ est 5 et la courbe admet l'asymptote horizontale y = 5.
- La distance parcourue est l'intégrale de la vitesse : d = $F(t_1) - F(t_0)$, si F est une primitive de f.
- La transformée de Laplace de U(t - a) est e^(-ap)/p ; le décalage temporel ajoute donc un facteur exponentiel.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : vitesse en m/s, temps en secondes et distance obtenue par intégration en mètres.
- Pour le tableau de variation, utiliser le signe de f' et indiquer la valeur initiale ainsi que la limite.
- Pour la tangente en zéro, utiliser f(0) et f'(0) ; distinguer le terme d'ordre 2 et le reste du développement limité.
- Pour les signaux, distinguer les intervalles avant et après t = 1 et soigner les tracés sur le document-réponse.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue à partir de la vitesse du chariot ?

On intègre la vitesse sur l'intervalle considéré : d = ∫ f(t)dt. Avec une primitive F, cela donne d = $F(t_1) - F(t_0)$. On fournit la valeur exacte, puis l'arrondi demandé au centimètre.

Q : Comment traiter le décalage U(t - 1) avec la transformée de Laplace ?

La transformée de l'échelon retardé U(t - a) est e^(-ap)/p. Pour a = 1, le terme U(t - 1) donne donc e^(-p)/p, conformément au formulaire fourni dans le sujet.

Q : Comment organiser les deux exercices pendant les deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points, et les parties de l'exercice 1 peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices et gardez une marge pour vérifier les calculs et compléter les tracés.

Q : Quelles précautions prendre pour les tracés et les arrondis ?

Respectez les axes, les unités et le comportement du signal à t = 1. Donnez les valeurs exactes lorsqu'elles sont demandées, puis arrondissez selon la précision indiquée : au centimètre pour la distance et au dixième pour s(1).

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsesf.fr/assets/annales/bts-esf/E2 - Mathématiques/2022/BTS ESF - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Économie Sociale et Familiale : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.