Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ÉCONOMIE SOCIALE ET FAMILIALE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Séries de Fourier d’une fonction paire périodique (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsesf.fr/assets/annales/bts-esf/E2 - Mathématiques/2023/BTS ESF - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond d’un tiroir et le fond du meuble est modélisée par une fonction du temps, en centimètres. L’exercice étudie cette fonction par une équation différentielle, ses variations, un algorithme de seuil et le calcul d’une position moyenne.

Partie A : Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On calcule le discriminant de l’équation caractéristique : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Il est positif, donc l’équation admet deux racines réelles distinctes. La formule donne $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$. En calculant séparément les deux valeurs, on obtient les racines nécessaires pour résoudre l’équation différentielle à la question suivante.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les deux racines sont $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. Résoudre l’équation différentielle (E₀) : y″ + 5y′ + 4y = 0, en utilisant le tableau fourni.

Les deux racines étant réelles et distinctes, on applique la première ligne du tableau fourni.

1. À chaque racine r_i correspond une exponentielle $e^{r_i t}$.
2. La solution générale est une combinaison linéaire de ces deux exponentielles, avec des constantes réelles indépendantes.

On remplace ensuite les racines par leurs valeurs pour obtenir l’expression valable sur l’intervalle étudié.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la position initiale de 20 cm et de la vitesse initiale de −10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f′(0).

La fonction $f(t)$ représente la distance OM en centimètres. À l’instant $t = 0$, le point M se trouve à 20 cm de O : cette distance donne directement la valeur initiale de la fonction. La dérivée $f'(0)$ représente la vitesse à cet instant. L’énoncé précise que M se déplace vers O avec une vitesse négative de 10 cm par seconde, ce qui fournit la valeur initiale de la dérivée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. **En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ − (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

Pour obtenir la distance après deux secondes, on évalue la fonction admise en $t = 2$. On remplace donc t par 2 dans les deux exponentielles : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-4\times 2}$. L'exposant du second terme vaut -8. L'expression obtenue est exacte et la distance est exprimée en centimètres. Une évaluation numérique donne environ 3,1567 cm.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Après 2 secondes, $\mathrm{OM} = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si l'affirmation du constructeur, selon laquelle le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, est exacte et justifier.**

La fonction est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, comme indiqué dans la partie B. Il suffit donc de comparer la distance à 4 secondes au seuil de fermeture. En remplaçant t par 4, on obtient $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,4274$ cm. Cette distance est inférieure à 0,5 cm : le seuil a été atteint avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui. À 4 s, la distance est d'environ 0,4274 cm, donc inférieure au seuil de 0,5 cm.

Partie B : Étude de fonction

Question 1.a. **Sachant que $\lim_{u\to+\infty} e^{-u} = 0$, déterminer $\lim_{t\to+\infty} f(t)$, pour f(t) = (70/3)e⁻ᵗ − (10/3)e⁻⁴ᵗ.**

Lorsque t tend vers $+\infty$, les quantités t et $4t$ tendent aussi vers $+\infty$. Par conséquent, e^{-t} et e^{-4t} tendent vers zéro, d'après la limite rappelée dans l'énoncé. Les coefficients $\frac{70}{3}$ et $-\frac{10}{3}$ étant constants, chacun des deux termes de $f(t)$ tend vers zéro. Leur différence tend donc vers zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote, puis en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$ est finie. La courbe représentative possède donc une asymptote horizontale à droite, dont l'ordonnée est égale à cette limite. Ici, la fonction se rapproche de zéro lorsque le temps augmente. L'asymptote est ainsi l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$ a pour équation $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme avec la règle $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$. Pour le premier terme, l'exposant $-t$ a pour dérivée -1, d'où $-\frac{70}{3}e^{-t}$. Pour le second, l'exposant $-4t$ a pour dérivée -4 ; le signe négatif placé devant le terme transforme donc sa dérivée en un terme positif.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

La dérivée est strictement négative sur l'intervalle étudié, donc f est strictement décroissante. À gauche, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$. À droite, la limite de $f(t)$ est 0. Le tableau résume le signe de la dérivée et l'évolution de la fonction, qui tend vers 0 sans l'atteindre sur l'intervalle.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 0$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement décroissante de 20 vers 0 sur $[0, +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant des lignes si nécessaire, jusqu'à son arrêt. Indiquer les valeurs de t, de f(t) arrondies au centième, ainsi que le résultat du test (70/3)e^{-t} − (10/3)e^{-4t} > 0,5.

La variable commence à 0 et augmente de $p = 0,1$ à chaque passage dans la boucle. Ainsi, la ligne numéro 36 correspond à $t = 3,6$, puis les lignes suivantes à 3,7 et 3,8. On évalue la fonction à ces instants et on compare chaque valeur à $s = 0,5$. Le test devient faux à $t = 3,9$, ce qui arrête la boucle.

Ligne	t	$f(t)$, au centième	Test $f(t) > 0,5$
36	3,6	0,64	VRAI
37	3,7	0,58	VRAI
38	3,8	0,52	VRAI
39	3,9	0,47	FAUX

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le test devient faux à la ligne 39, pour $t = 3,9$.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

L'algorithme augmente t de 0,1 tant que la distance reste strictement supérieure à 0,5 cm. À $t = 3,8$, le test est encore vrai puisque $f(3,8) \approx 0,52$. Après l'incrément suivant, $t = 3,9$ et $f(3,9) \approx 0,47$, donc le test est faux. La boucle s'arrête alors et cette valeur de t correspond à un tiroir fermé selon le critère donné.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La variable finale vaut $t = 3,9$ s ; la distance est alors inférieure à 0,5 cm.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 − (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. On applique la définition de la moyenne : $m = \frac{1}{4}(F(4) - F(0))$. Ainsi, $m = \frac{35}{6}(1 - e^{-4}) - \frac{5}{24}(1 - e^{-16})$. En développant, la partie constante vaut $\frac{35}{6} - \frac{5}{24} = \frac{45}{8}$, ce qui donne l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$.

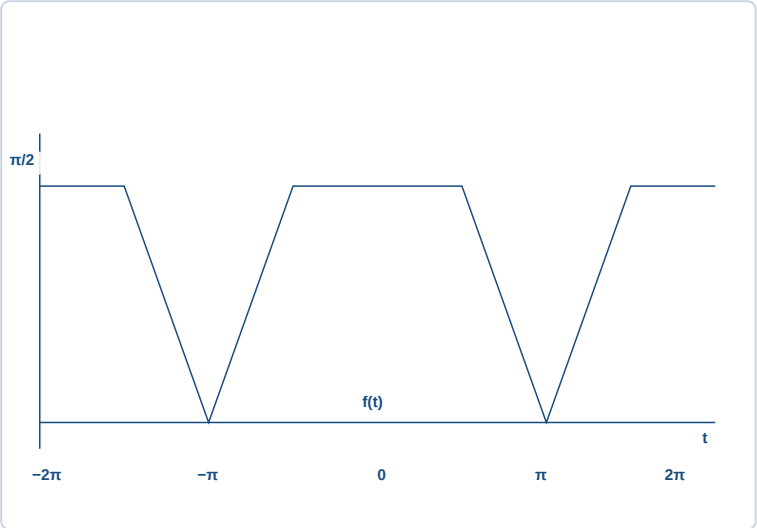
2. Séries de Fourier d'une fonction paire périodique

L'exercice étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π], à l'aide du formulaire de séries de Fourier fourni. Il demande de représenter la fonction, de calculer ses coefficients et d'examiner la somme partielle s_3 ainsi qu'une approximation de la valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [−2π ; 2π], en utilisant sa définition par morceaux, sa parité et sa périodicité.

Sur \,$[0, \pi/2]$, $f(t) = \pi/2$, puis sur $[\pi/2, \pi]$, $f(t) = \pi - t$. La parité donne le tracé en miroir sur $[-\pi, 0]$, et la période 2π répète ce motif. Sur l'intervalle demandé, les paliers sont à la hauteur $\pi/2$, avec des minima nuls aux abscisses $-\pi$ et π.

Graphe de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracer les paliers de hauteur $\pi/2$ et les segments reliant chaque palier aux minima $(-\pi, 0)$ et $(\pi, 0)$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Sur une période centrée en zéro, le coefficient s'écrit $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$. La fonction f est paire, tandis que $\sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur $[-\pi, \pi]$ est nulle. Cette intégrale représente le même coefficient de Fourier que sur tout autre intervalle d'une période.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $f(t)\sin(nt)$ est impair, donc $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

1. La formule du formulaire relie période et pulsation : $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
2. La période indiquée vaut $T = 2\pi$. Ainsi, $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$, en radians par unité de temps.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$.

Question 4. Démontrer que le coefficient a_0 vaut $3\pi/8$.

Le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. Comme f est paire et $T = 2\pi$, on obtient $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. En séparant les deux morceaux de la définition : $a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}\right)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, a_n = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π − t)cos(nt)dt.

> Pour $n \geq 1$, le formulaire et la parité donnent $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$.

Avec $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, cela devient $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. Sur $[0, \pi/2]$, $f(t) = \pi/2$; sur $[\pi/2, \pi]$, $f(t) = \pi - t$. En séparant l'intégrale, le premier terme se simplifie en $\int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt$, ce qui donne l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$, pour tout $n \geq 1$.

Question 6. En admettant que a_n = 2/(πn²) (cos(nπ/2) − cos(nπ)), déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

On applique la formule admise aux trois entiers demandés. Pour $n = 1$, les cosinus valent 0 et -1; pour $n = 2$, ils valent -1 et 1; pour $n = 3$, ils valent 0 et -1. La substitution dans $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos(\frac{n\pi}{2}) - \cos(n\pi)\right)$ fournit les coefficients suivants.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}$, $\quad a_2 = -\frac{1}{\pi}$, $\quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. Déduire l'expression de la somme partielle $s_3(t)$ = 3π/8 + (2/π)cos(t) − (1/π)cos(2t) + (2/(9π))cos(3t).

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + a_1\cos(t) + a_2\cos(2t) + a_3\cos(3t)$, puisque tous les coefficients sinus sont nuls. En remplaçant les quatre coefficients par leurs valeurs établies précédemment, on obtient directement la formule demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.

La somme s_3 est une fonction paire et périodique. Sa courbe est lisse, avec des creux marqués aux abscisses impaires multiples de π et des zones presque horizontales autour des multiples de 2π. Parmi les tracés proposés, ces caractéristiques correspondent à la courbe numéro 3.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

On remplace les coefficients par leurs valeurs exactes : $P = (\frac{3\pi}{8})^2 + \frac{1}{2}[(\frac{2}{\pi})^2 + (-\frac{1}{\pi})^2 + (\frac{2}{9\pi})^2]$. Le regroupement des termes donne $P = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$. L'arrondi au dix-millième est alors $1{,}6437$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. Sachant que F est la valeur efficace de f, que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, choisir le pourcentage d'erreur parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est attendue, sans justification.

- La valeur de référence est $F^2 = \frac{\pi^2}{6}$.
- Avec la valeur non arrondie de P, l'erreur relative vaut $\frac{|P - F^2|}{F^2} \times 100 \approx 0{,}074\%$. Parmi les trois choix, cela correspond à $0{,}1\%$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$0{,}1\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ou de 2 en Électrotechnique. Ses deux exercices de 10 points portent sur la fermeture d'un tiroir, modélisée par une équation différentielle et une fonction, puis sur les séries de Fourier d'une fonction paire périodique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de $r^2 + 5r + 4 = 0$ déterminent la forme de la solution générale.
- Si $f'(t) < 0$ sur un intervalle, f y est strictement décroissante.
- Pour une fonction paire, les coefficients sinus b_n sont nuls et a_n se calcule sur une demi-période.
- La position moyenne sur [0 ; 4] est $m = (1/4)\int_0^4 f(t)dt$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les conditions initiales de position et de vitesse, notamment le signe négatif de la vitesse.
- Appliquer le test de seuil à chaque valeur de t et distinguer la dernière valeur testée de la valeur finale de l'algorithme.
- Utiliser correctement la parité, la période et les coefficients de Fourier pour tracer la fonction.
- Pour la somme partielle, comparer les courbes proposées avec l'expression de s_3 et tenir compte de la consigne sans justification.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution générale de l'équation différentielle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines réelles distinctes donnent deux termes exponentiels dans la solution générale, puis les conditions initiales permettent d'en déterminer les coefficients.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice de Fourier ?

La fonction est paire et la fonction sinus est impaire. Leur produit est donc impair sur un intervalle symétrique, ce qui rend son intégrale nulle et entraîne $b_n = 0$ pour tout n supérieur ou égal à 1.

Q : Comment suivre l'algorithme avec un pas de 0,1 ?

On commence à t = 0 et on teste si $f(t) > 0{,}5$. Tant que le test est vrai, on augmente t de 0,1 ; l'algorithme s'arrête dès que le test devient faux, et cette valeur finale doit être interprétée dans le contexte.

Q : Quels éléments de notation et quelle justification sont attendus pour les courbes et le QCM ?

Chaque exercice vaut 10 points. La question 8 demande uniquement d'indiquer la courbe de s_3, sans justification. Pour la question 9.b, une seule réponse parmi les trois pourcentages est attendue ; une réponse fausse ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsesf.fr/assets/annales/bts-esf/E2 - Mathématiques/2023/BTS ESF - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Économie Sociale et Familiale : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.