Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ÉCONOMIE SOCIALE ET FAMILIALE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Électrotechnique

Session 2025 • Code sujet : **25MATGRB3** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Refroidissement d'une plaque d'aluminium (9 questions) **Page 3**

2. Signal périodique et séries de Fourier (8 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsesf.fr/assets/annales/bts-esf/E2 - Mathématiques/2025/BTS ESF - E2 - Mathématiques - Session 2025 - 3-Sujet.pdf

1. Refroidissement d'une plaque d'aluminium

Une plaque d'aluminium chauffée à 250 °C refroidit après sa sortie du four, et sa température est modélisée en fonction du temps exprimé en minutes. L'exercice étudie une équation différentielle puis les propriétés, l'interprétation et le croquis de la fonction exponentielle décrivant le refroidissement.

Partie A. Équation différentielle

Question 1. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,25y = 0 en s'appuyant sur la formule fournie.

La formule donnée concerne l'équation homogène $y' + ay = 0$. Ici, le coefficient est $a = 0{,}25$. On remplace donc a dans l'expression générale : les solutions sont de la forme $y(t) = ke^{-0{,}25t}$, où k est une constante réelle. Sans condition initiale, cette constante reste libre. Ces fonctions sont définies et dérivables sur l'intervalle demandé $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}25t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer le réel c pour que la fonction constante g définie par g(t) = c soit solution de l'équation différentielle y' + 0,25y = 7,5.

Pour la fonction constante $g(t) = c$, la dérivée est nulle : $g'(t) = 0$. En substituant g et sa dérivée dans l'équation, on obtient $0 + 0{,}25c = 7{,}5$. Il suffit alors de diviser les deux membres par $0{,}25$. La valeur obtenue rend bien le membre de gauche égal au second membre, donc la fonction constante correspondante est une solution particulière.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $c = 30$.

Question 3. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,25y = 7,5.

On connaît les solutions de l'équation homogène : $ke^{-0{,}25t}$. Une solution particulière de l'équation complète est la fonction constante égale à 30, déterminée à la question précédente. La solution générale de l'équation complète s'obtient en ajoutant cette solution particulière à toutes les solutions de l'équation homogène. La constante k peut être choisie librement dans $\mathbb{R}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}25t} + 30$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4. Déterminer l'expression de la fonction f sachant qu'à l'instant t = 0, la température est égale à 250 °C.

La solution générale de l'équation est $f(t) = ke^{-0{,}25t} + 30$. La condition initiale impose $f(0) = 250$. Comme $e^0 = 1$, on a $k + 30 = 250$, donc $k = 250 - 30 = 220$. En remplaçant k dans la solution générale, on obtient l'expression de la température, qui vérifie à la fois l'équation différentielle et la valeur initiale donnée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 220e^{-0{,}25t} + 30$.

Partie B. Étude de fonction

Question 1. À partir de f(t) = 220e^(-0,25t) + 30, déterminer à 0,1 °C près la température de la plaque après un quart d'heure de refroidissement.

Un quart d'heure représente 15 minutes, puisque le temps est exprimé en minutes. On calcule donc $f(15) = 220e^{-0{,}25\times 15} + 30 \approx 35{,}1739$. L'arrondi au dixième de degré s'obtient en conservant une décimale. La valeur calculée est la température modélisée par la fonction après ce temps de refroidissement.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Après 15 minutes, la température est d'environ $35{,}2\ ^\circ\mathrm{C}$.

Question 2. Déterminer la limite de f en +∞, préciser la conséquence pour la courbe représentative et interpréter le résultat dans le contexte du refroidissement.

Quand t tend vers $+\infty$, l'exponentielle $e^{-0{,}25t}$ tend vers 0. Par conséquent, le terme $220e^{-0{,}25t}$ tend vers 0 et la fonction tend vers 30. La courbe admet donc la droite horizontale d'équation $y = 30$ comme asymptote en $+\infty$. Dans le contexte, la température de la plaque se rapproche de 30 °C pendant son refroidissement.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 30$ °C ; asymptote horizontale : $y = 30$.

Question 3. Déterminer f'(t), en déduire les variations de f sur [0 ; +∞[et interpréter ces variations dans le contexte de l'exercice.

Par dérivation de l'exponentielle composée, $f'(t) = 220 \times (-0{,}25)e^{-0{,}25t} = -55e^{-0{,}25t}$. L'exponentielle étant strictement positive, la dérivée est négative sur tout l'intervalle étudié.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	250	$\searrow 30$

Ainsi, la température diminue continûment, de 250 °C, puis se rapproche de 30 °C.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -55e^{-0{,}25t} < 0$: la température décroît de 250 °C vers 30 °C.

Question 4. Vérifier si la plaque perd cent degrés en cent secondes, puis déterminer, à la seconde près, la durée nécessaire pour que sa température passe en dessous de 150 °C. Justifier les réponses.

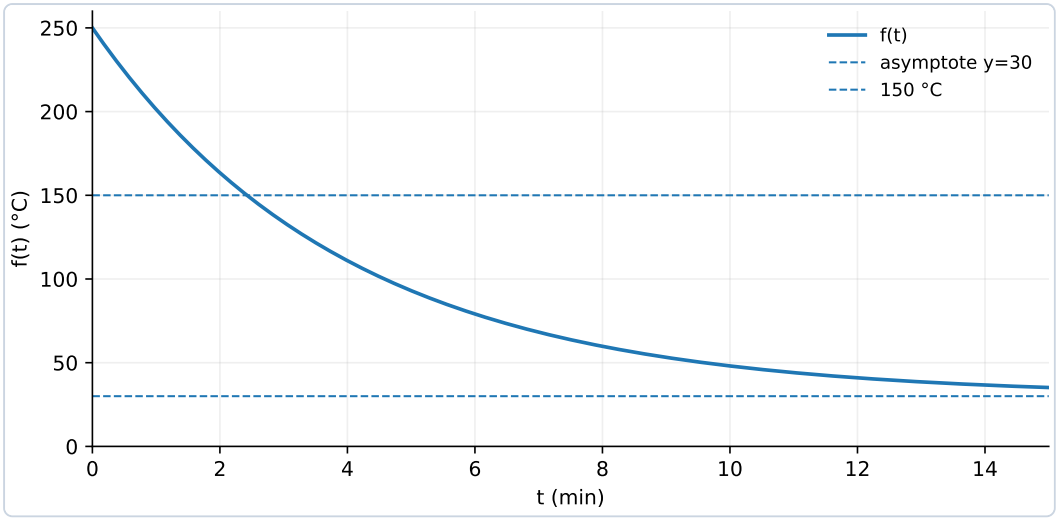
Cent secondes valent $100/60 = 5/3$ minutes. La température vaut alors $f(5/3) \approx 175{,}03$ °C : la perte est d'environ $250 - 175{,}03 = 74{,}97$ °C. L'affirmation du technicien est donc fausse. Pour le seuil, résoudre $f(t) = 150$ donne $220e^{-0{,}25t} = 120$, puis $t = 4\ln(11/6) \approx 2{,}4245$ minutes, soit $145{,}47$ secondes. La température passe sous 150 °C après cet instant.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 100 s, la plaque perd environ 75 °C, pas 100 °C. Le seuil de 150 °C est franchi après environ 145 s, à la seconde près.

Question 5. Réaliser un croquis de la courbe représentative de f en faisant apparaître les résultats des questions 1 à 4.

Le croquis doit montrer une courbe décroissante partant de $(0; 250)$, passant par $(15; 35{,}2)$ et s'approchant de l'asymptote $y = 30$. Elle coupe le niveau 150 °C vers $t = 2{,}4245$ minutes, soit environ 145 secondes. Après 100 secondes, la perte de température est d'environ 75 °C. Le graphique ci-dessous représente la fonction sur l'intervalle de temps demandé et indique les deux niveaux utiles.

Refroidissement de la plaque d'aluminium



La courbe part de (0, 250), passe par (15, environ 35,2) et franchit 150 °C à t ≈ 2,4245 min, soit environ 145 s.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe décroissante de $(0;250)$, asymptote $y=30$, avec $f(15)\approx 35{,}2$ °C et passage sous 150 °C après environ 145 s.

2. Signal périodique et séries de Fourier

La tension aux bornes d'un générateur est modélisée par un signal périodique de période π, défini par u(t) = t sur une période. Les questions portent sur ses valeurs et sa représentation, puis sur sa valeur moyenne, sa fréquence, ses coefficients, ses amplitudes et l'analyse de spectres de Fourier.

Question 1. Donner les valeurs de u(1), u(π), u(π + 1) et u(4).

La période est π et $u(t) = t$ sur $[0; \pi[$. Donc $u(1) = 1$. À l'instant π, le signal reprend sa valeur en zéro, ainsi $u(\pi) = 0$. Par périodicité, $u(\pi + 1) = u(1)$. Enfin, $\pi < 4 < 2\pi$, donc $u(4) = u(4 - \pi) = 4 - \pi$, soit environ $0,86$.

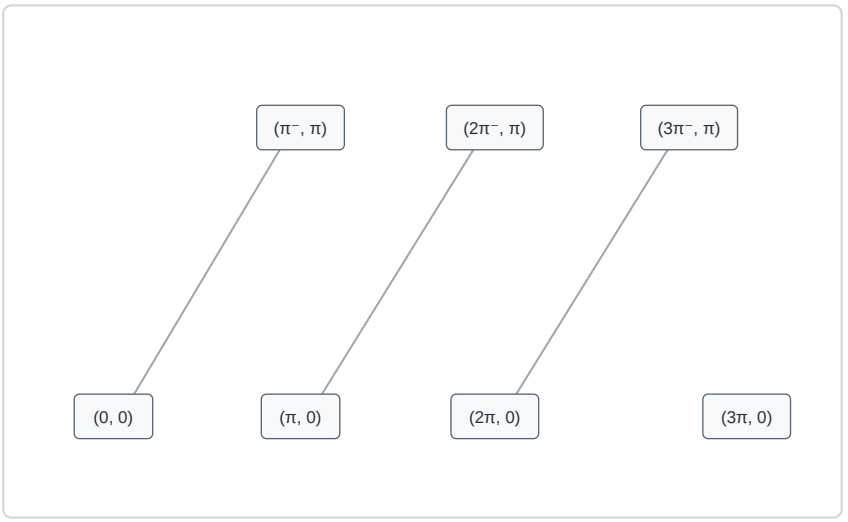
✓ RÉPONSE À RETENIR

$u(1) = 1$ V, $u(\pi) = 0$ V, $u(\pi + 1) = 1$ V et $u(4) = 4 - \pi \approx 0,86$ V.

Question 2. Faire un croquis donnant l'allure du signal u(t) sur un intervalle dont la longueur est au moins égale à trois périodes.

Sur chaque intervalle $[k\pi; (k + 1)\pi[$, le signal est une droite croissante de pente 1. Il part de 0 et tend vers π, puis reprend la valeur 0 au multiple de π suivant. Le croquis montre trois périodes. Les points π^-, $2\pi^-$ et $3\pi^-$ représentent les limites à gauche, non incluses ; aucune rampe verticale ne fait partie du signal.

Signal u(t) sur trois périodes



Abscisse : t (s). Ordonnée : u(t) (V). Les extrémités π⁻, 2π⁻ et 3π⁻ sont des limites non incluses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Signal en dents de scie croissantes, de période π, avec des sauts aux multiples de π.

Question 3. **Un signal est alternatif si sa valeur moyenne sur une période est nulle. Déterminer si u(t) est alternatif et justifier la réponse.**

La valeur moyenne sur une période est $\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt$. Avec $T=\pi$ et $u(t)=t$, on obtient $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$. Cette moyenne est positive, donc elle n'est pas nulle. Selon la définition donnée dans l'énoncé, le signal n'est pas alternatif.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le signal n'est pas alternatif : sa valeur moyenne est $\frac{\pi}{2}$ V.

Question 4. **Déterminer la fréquence f du signal u(t), ainsi que sa pulsation ω.**

La période est $T=\pi$ secondes. La fréquence vaut l'inverse de la période : $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{\pi}$ Hz. D'après le formulaire, la pulsation est $\omega=\frac{2\pi}{T}$, donc $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$ rad·s^{-1}. La fréquence décimale est donnée au millième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f=\frac{1}{\pi}\approx 0,318$ Hz et $\omega=2$ rad·s^{-1}.

Question 5. **À l'aide de l'intégrale fournie et du formulaire sur les séries de Fourier, déduire que, pour tout entier n ≥ 1, le coefficient b_n vaut -1/n.**

Le formulaire donne $b_n=\frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega t)\,dt$. Ici, $T=\pi$, $\omega=2$ et $u(t)=t$, donc $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\sin(2nt)\,dt$. L'intégrale fournie vaut $-\frac{\pi}{2n}$. Ainsi, $b_n=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\right)=-\frac{1}{n}$, pour tout entier $n\geq 1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout entier $n\geq 1$, $b_n=-\frac{1}{n}$.

Question 6. **Sachant que a_n = 0 pour n ≥ 1, recopier et compléter le tableau des valeurs exactes et des valeurs approchées à 10^-2 près des amplitudes A_n pour n = 0, 1, 2, 3 et 4.**

Le coefficient constant est la valeur moyenne : $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\,dt=\frac{\pi}{2}$, donc $A_0=\frac{\pi}{2}$. Pour $n\geq 1$, $a_n=0$ et $b_n=-\frac{1}{n}$, d'où $A_n=\sqrt{0^2+(-1/n)^2}=\frac{1}{n}$. Les valeurs approchées sont arrondies au centième.

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Valeur exacte de A_n	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
Valeur approchée	1,57	1,00	0,50	0,33	0,25

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

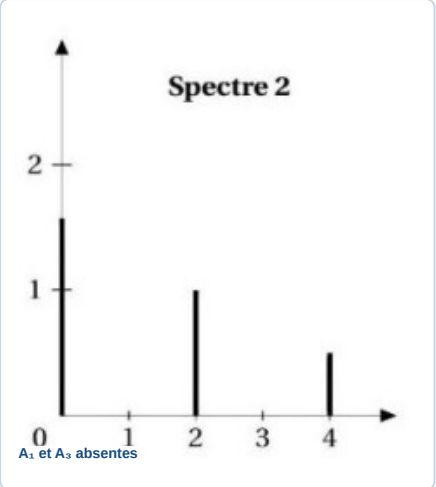
Pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$, les amplitudes exactes sont $\frac{\pi}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$; au centième : 1,57 ; 1,00 ; 0,50 ; 0,33 ; 0,25.

Spectres

Question 7.a. Expliquer pourquoi le Spectre 2 ne peut pas être celui du signal u(t).

Pour le signal étudié, $A_n = \frac{1}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$. En particulier, $A_1 = 1$ et $A_3 = \frac{1}{3}$ sont non nulles. Or le Spectre 2 représenté dans le sujet ne comporte pas de barre aux indices 1 et 3. Il ne peut donc pas correspondre au signal $u(t)$. Les barres présentes aux indices 0, 2 et 4 ne corrigent pas ces deux absences.

Spectre 2 : amplitudes manquantes



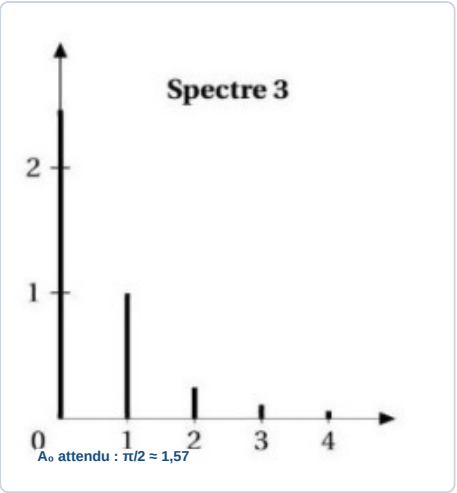
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Le Spectre 2 est impossible : il manque $A_1 = 1$ et $A_3 = \frac{1}{3}$.

Question 7.b. Expliquer pourquoi le Spectre 3 ne peut pas être celui du signal u(t).

La barre d'indice 0 représente $A_0 = |a_0|$. Le coefficient constant est la valeur moyenne : $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{\pi}{2}$, donc $A_0 \approx 1,57$. Sur le Spectre 3 du sujet, la barre d'indice 0 dépasse le niveau 2. Cette hauteur est incompatible avec l'amplitude calculée et suffit à exclure ce spectre.

Spectre 3 : amplitude à l'indice 0



✓ RÉPONSE À RETENIR

Le Spectre 3 est impossible : $A_0 = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$, alors que la barre représentée dépasse 2.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2025)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2025, porte le code 25MATGRB3 et dure deux heures, coefficient 2 en électrotechnique. Elle comprend deux exercices de dix points : refroidissement exponentiel d'une plaque d'aluminium, puis étude d'un signal périodique par séries de Fourier. Les compétences évaluées incluent équations différentielles, étude de fonction, interprétation physique, calcul de coefficients, amplitudes et lecture d'un spectre.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, une solution particulière constante vaut b/a si a est non nul; les solutions générales s'obtiennent en ajoutant les solutions homogènes.
- La dérivée de e^(kt) est k e^(kt); le signe de la dérivée détermine les variations et la limite de l'exponentielle guide l'interprétation de l'asymptote.
- Pour un signal de période T, la fréquence est f = 1/T et la pulsation est ω = 2π/T.
- Pour n ≥ 1, l'amplitude de Fourier est A_n = √(a_n² + b_n²); l'amplitude A_0 est la valeur absolue du coefficient a_0.

Points de vigilance & attentes du jury

- Le modèle de refroidissement utilise des minutes : convertir les secondes en minutes avant de calculer une température.
- Relier la limite et les variations de la fonction au comportement physique de la température de la plaque.
- Pour calculer u(t), ramener t dans un intervalle d'une période en utilisant la périodicité T = π.
- Compléter les valeurs exactes et approchées des amplitudes, puis confronter les spectres aux résultats obtenus.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la température à un instant exprimé en secondes ?

Le temps du modèle est en minutes : convertir 100 s en 100/60 min, puis évaluer f(100/60). Pour vérifier la perte de 100 °C, comparer cette température à la valeur initiale de 250 °C et calculer la différence.

Q : Comment utiliser la périodicité pour calculer une valeur du signal ?

Ramener t modulo π dans l'intervalle [0 ; π[, puis appliquer u(r) = r au représentant r. La période vaut T = π s, donc la fréquence est 1/π Hz et la pulsation est ω = 2 rad/s.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Les deux exercices sont indépendants et valent chacun 10 points. Répartir le temps entre eux, puis garder quelques minutes pour vérifier les unités, les arrondis, les justifications et les croquis demandés.

Q : Qu'attend le jury pour les croquis et les justifications ?

Le croquis du refroidissement doit faire apparaître l'allure de la courbe et les résultats des questions 1 à 4. Pour les autres conclusions, présenter des calculs justifiés et une interprétation cohérente avec le contexte ou le signal étudié.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsesf.fr/assets/annales/bts-esf/E2 - Mathématiques/2025/BTS ESF - E2 - Mathématiques - Session 2025 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Économie Sociale et Familiale : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.